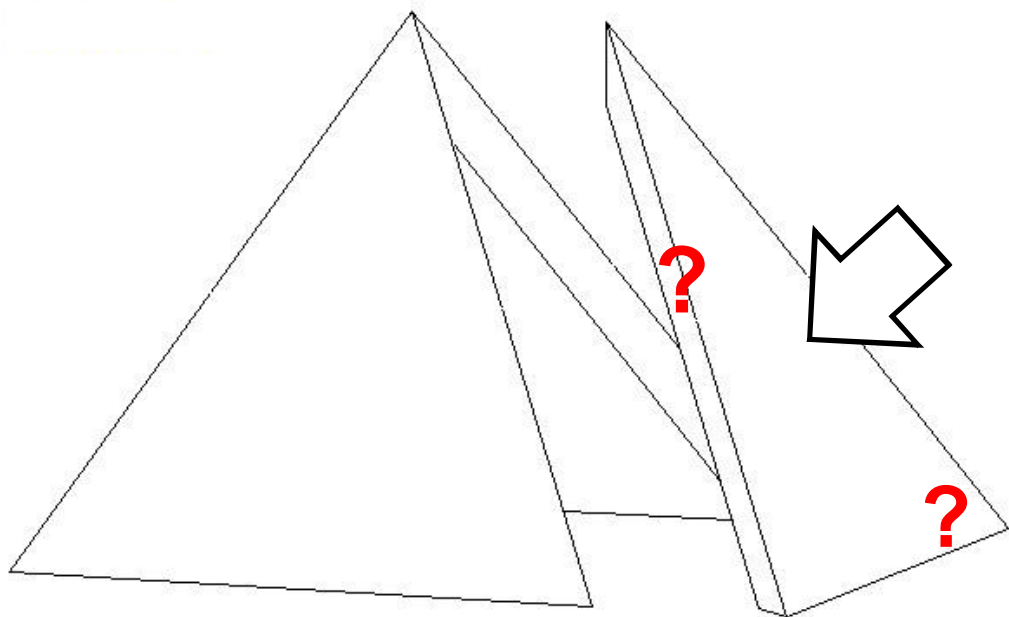


Mathematik und CAD-Lösung zum Erstellen einer Pyramidensegment -Bemaßung



Wer als Holzwerker eine Pyramide aus Plattenmaterial fertigen möchte steht vor dem Problem die entsprechenden Winkel für den Schnitt an der Säge zu bestimmen.

Im woodworking.de -Forum habe ich von Walter Heil die passenden Formeln, nebst dokumentierter Herleitung erhalten. Die von ihm erstellten Formeln habe ich nun anhand einer CAD- Pyramide nachvollzogen und einmal dokumentiert.

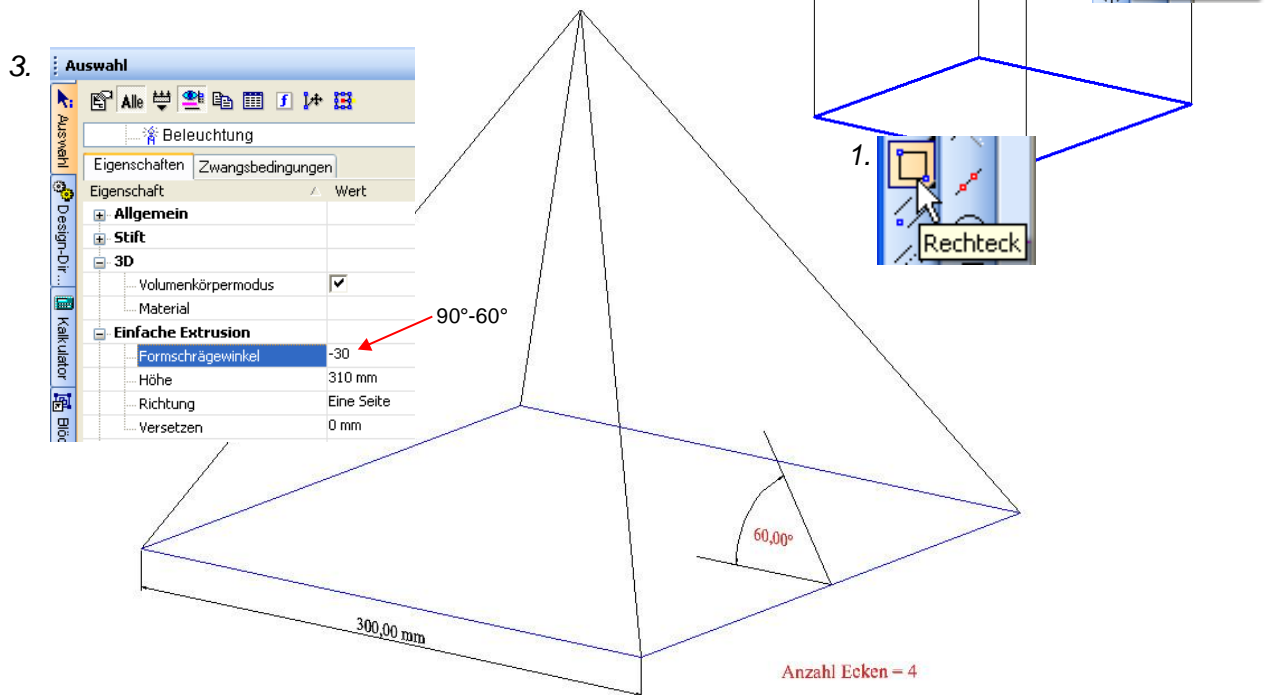
Nach der mathematischen Betrachtung gibt es noch eine **Schnellbemaßung** der Segmentwinkel in TurboCad. Das Wort „schnell“ muss allerdings durch „schnellstmöglich“ ersetzt werden.

Für den Praktiker habe ich einen Excelrechner erstellt. Ebenso gibt es eine PDF- Dokumentation mit Formeln und Tabellen zum Pyramidenschnitt.

Erstellen einer Pyramide

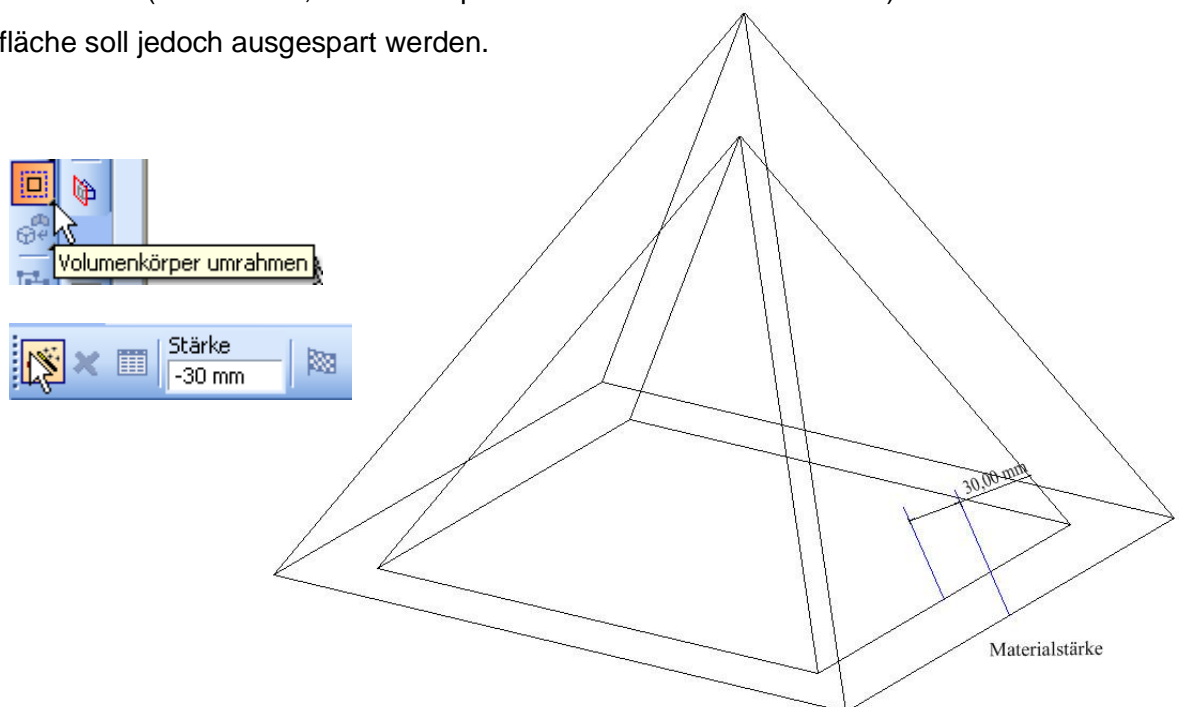
Zunächst soll eine Pyramide unter Vorgabe von Kantenlänge und Steigungswinkel erstellt werden:

1. Zeichne in TurboCad eine „quadratische“ 2D-Polylinie mit einer Seitenlänge von 300mm.
2. Auf diesem quadratischen Grundriss erstellen wir eine „Normale Extrusion“ mit einer Höhe von ca. 310mm.
3. Den Kubus auswählen. Über den Formschrägwinkel die Neigung (Komplementärwinkel zur Steigung) bestimmen.

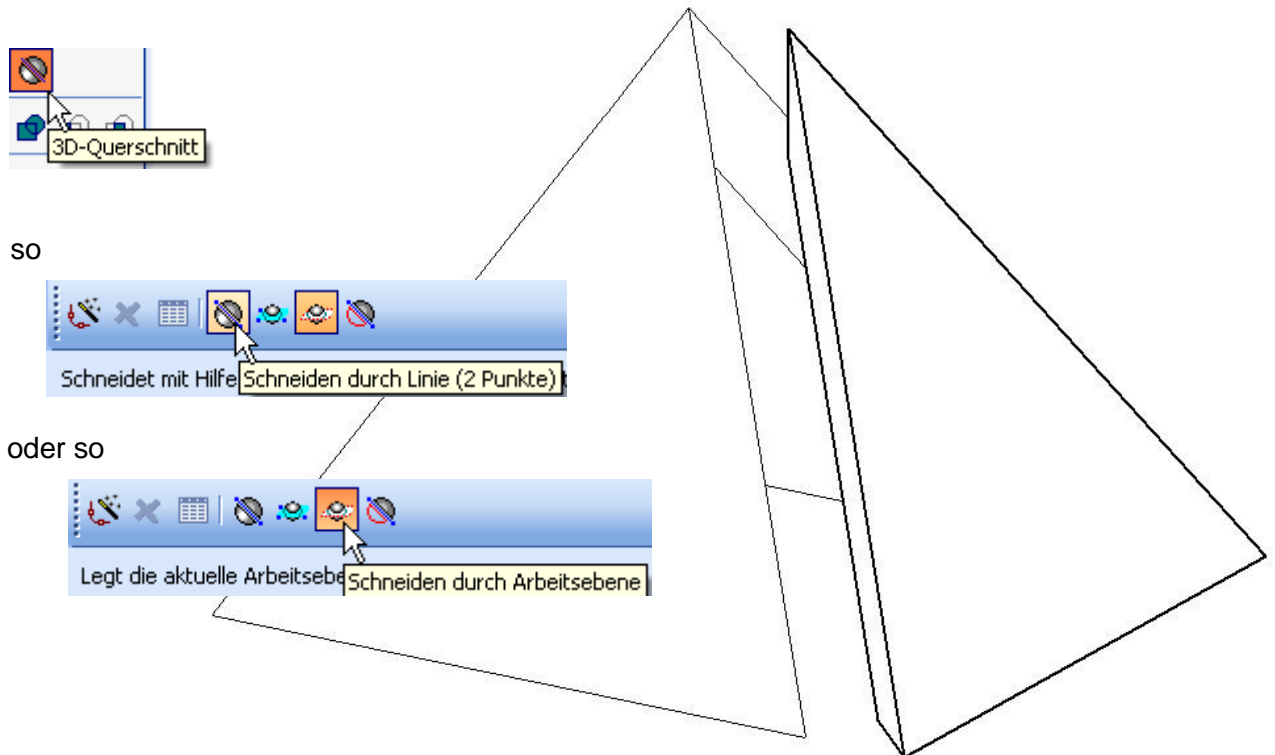


4. Um die Pyramide aus Plattenmaterial zu erstellen wird diese nun ausgehöhlt. Dies geschieht mit „Volumenkörper umrahmen“ und zwar mit einem negativen Wert für die Materialstärke (hier -30mm, damit wir später Platz zum bemaßen haben).

Die Grundfläche soll jedoch ausgespart werden.



5. Ich habe auf der Grundfläche die zwei möglichen Diagonalen eingezeichnet. Auf diesen oder einer jeweils neu zu definierenden Arbeitsebene [AE] wird die Pyramide geschnitten.



Resultat ist der Proband in Form des gewünschten Segmentes.

Weitere Vorbetrachtungen:

Die Dimensionen wurden so gewählt, dass ein Probeschnitt auf der Säge möglich ist. Die Materialstärke beeinflusst letztendlich nicht die Winkelformeln.

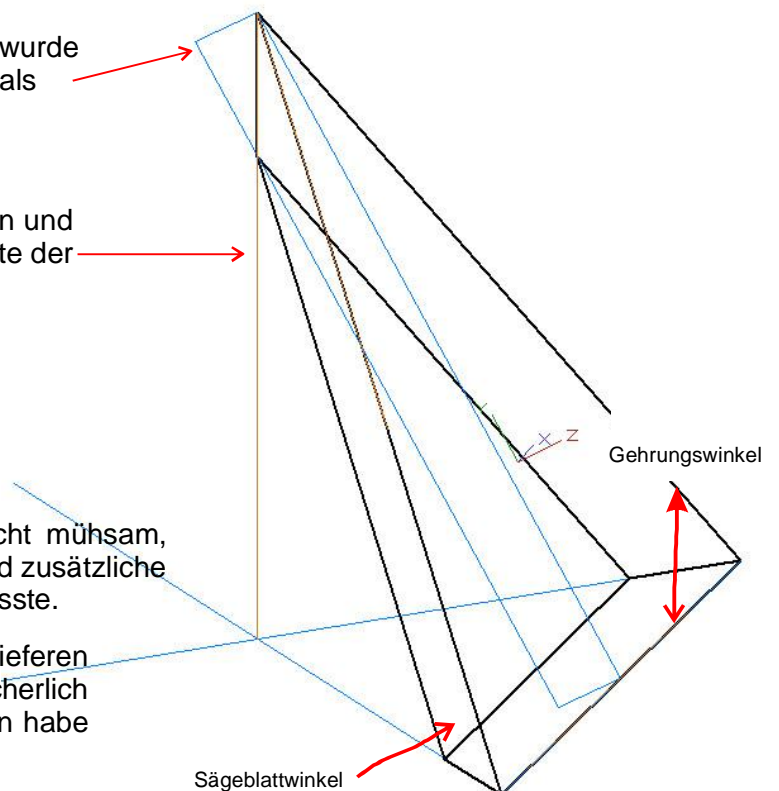
Für die weitere mathematische Betrachtung wurde noch der rechteckige Querschnitt des Materials eingezeichnet.

Die Original-Diagonalen sind noch vorhanden und eine zusätzliche Lotrechte wurde an die Kante der Segmentspitze gezeichnet.

Anm.:

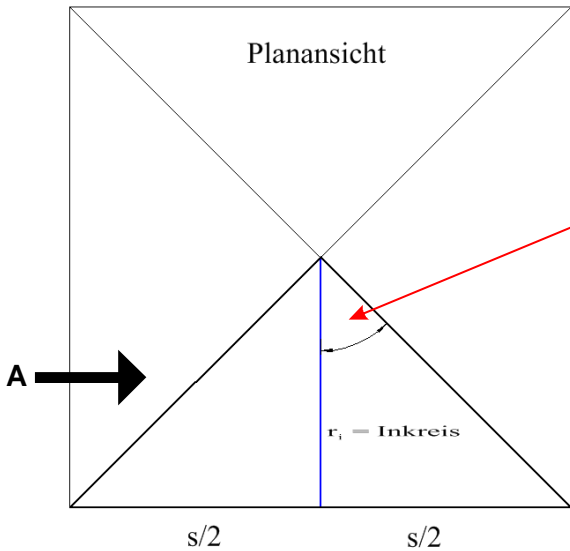
Die graphische Bemaßung im CAD ist recht mühsam, weil ich sehr oft Arbeitsebenen festgelegt und zusätzliche Hilfslinien auf den Segmentkorpus legen musste.

Dies alles mag jedoch meiner fehlenden, tieferen CAD-Kennntnis zuzuschreiben sein! So ist sicherlich manch geistiger Klimmzug den ich vollzogen habe unnötig.



So, nun geht es an die Herleitung der Formeln:

1. Der Gehrungswinkel



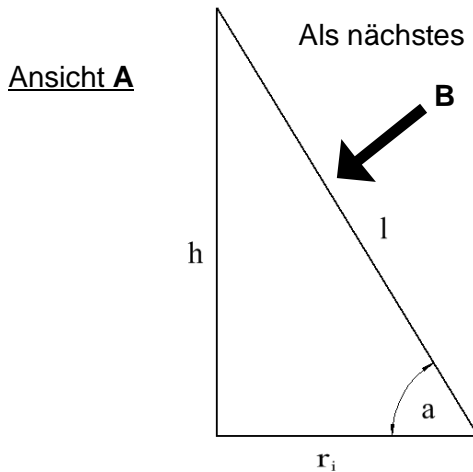
Schauen wir auf den Grundriss einer gleichseitigen Pyramide.

Für eine n-seitige Pyramide ist der

$$\text{Winkel: } \frac{1}{2} * \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$$

Für den Winkel ergibt sich eine weitere Beziehung

$$\tan \frac{180^\circ}{n} = \frac{s/2}{r_i} \quad \textcircled{1}$$



Als nächstes betrachten wir das gerade bemaßte Segment von der Seite

a = Steigungswinkel der Pyramide

$$\cos a = \frac{r_i}{l} \quad \textcircled{2}$$

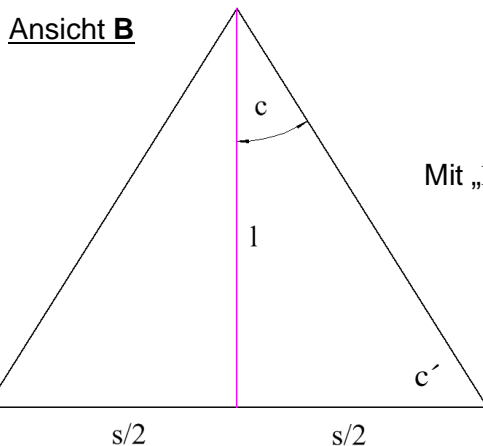


damit ergibt sich:

$$l = \frac{r_i}{\cos a}$$

Nun schauen wir senkrecht auf die Segmentfläche.

Der Winkel c ist der Winkel des Gehrungsanschlags



$$\tan c = \frac{s/2}{l} = \frac{s}{2 * l}$$



Mit „l“ aus ② folgt: $\tan c = \frac{s/2}{l} = \frac{s * \cos a}{2 * r_i}$

$$\tan c = \frac{s}{2 r_i} * \cos a \quad \textcircled{3}$$

Aus ① folgt damit die Bestimmung des **Gehrungswinkel**:



$$\tan c = \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right) * \cos a$$

In unserem Beispiel errechnet sich mit n = 4 (Ecken) und a = 60° (Steigung):

$$\tan c = \tan \left(\frac{180^\circ}{4} \right) * \cos 60^\circ = 1 * 0,5 = 0,5$$

Der Winkel beträgt $c = \arctan (0,5) = 26,565^\circ$
Der Komplementärwinkel ist damit $c' = 63,435^\circ$

Für eine **quadratische Grundfläche** (n=4)

folgt: $\tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right) = 1$ und somit:



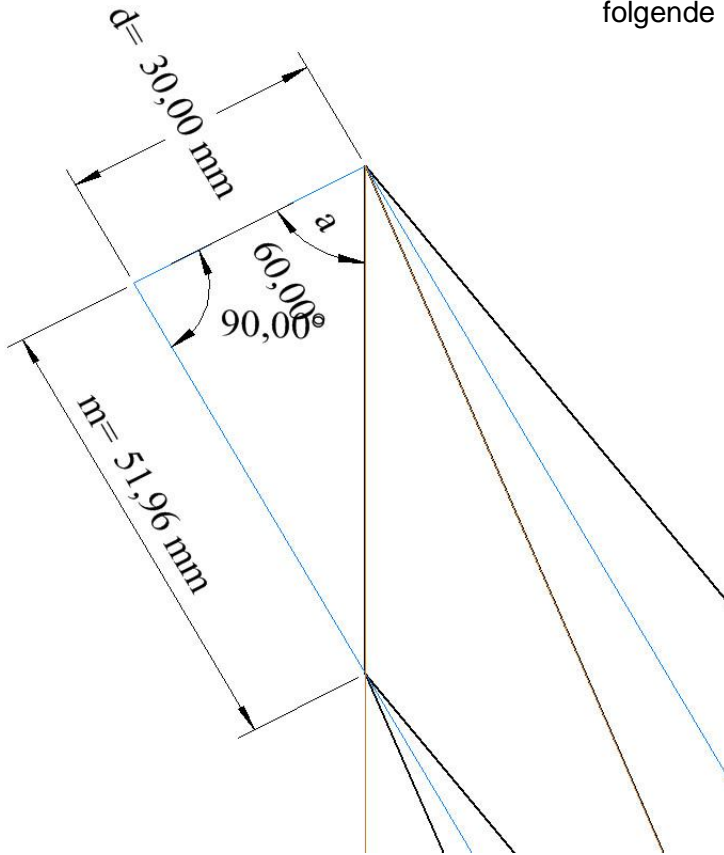
$$\tan c = \cos a$$

weiter gehts

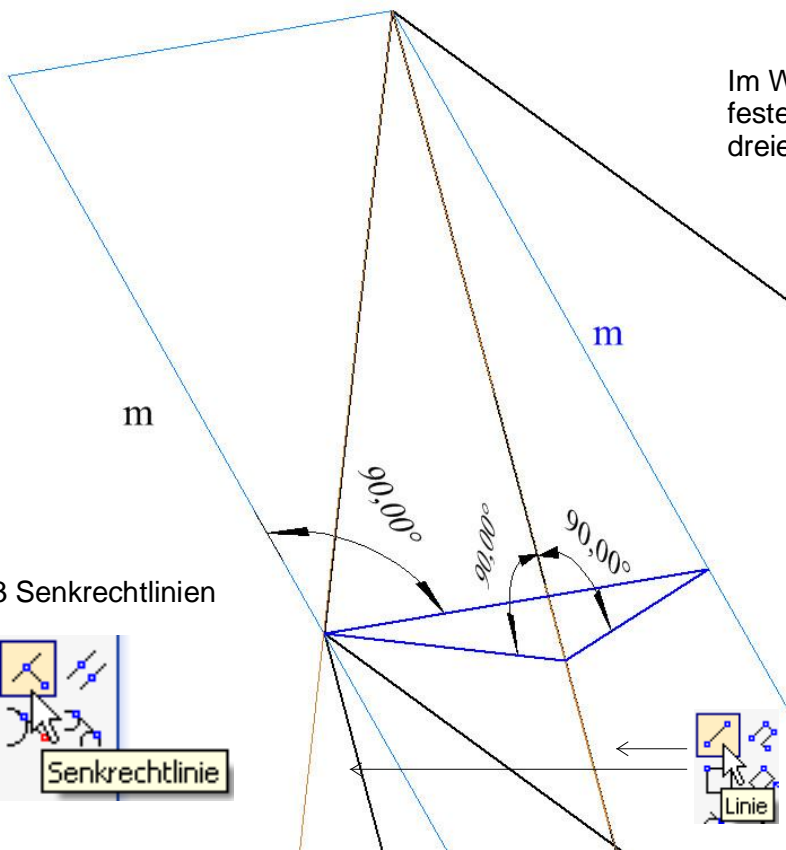
2. Die Sägeblattneigung

An dem rechteckigen Querschnitt kann man folgende Beziehungen festmachen:

$$\tan a = \frac{m}{d} \quad (4)$$



Zum Konstruieren haben wir konkrete Zahlenwerte benötigt. Für die Formelherleitung werden nur die Beziehungen aufgestellt!

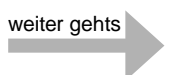


Im Weiteren kann ich aufgrund der festen rechten Winkel ein Bezugsdreieck einzeichnen.

Um die 90°-Winkel einzuhalten zeichne ich Senkrechten ein. Dabei ist es von Nöten die AE* auf die jeweilige „Zeichenfläche“ zu legen sowie auf den Bezugs-kanten des Segmentes „Hilfs“-Linien einzuzeichnen.

Beim Wechseln der AE musste ich erneut Hilfslinien zeichnen damit der Fang funktionierte.

*AE = Arbeitsebene



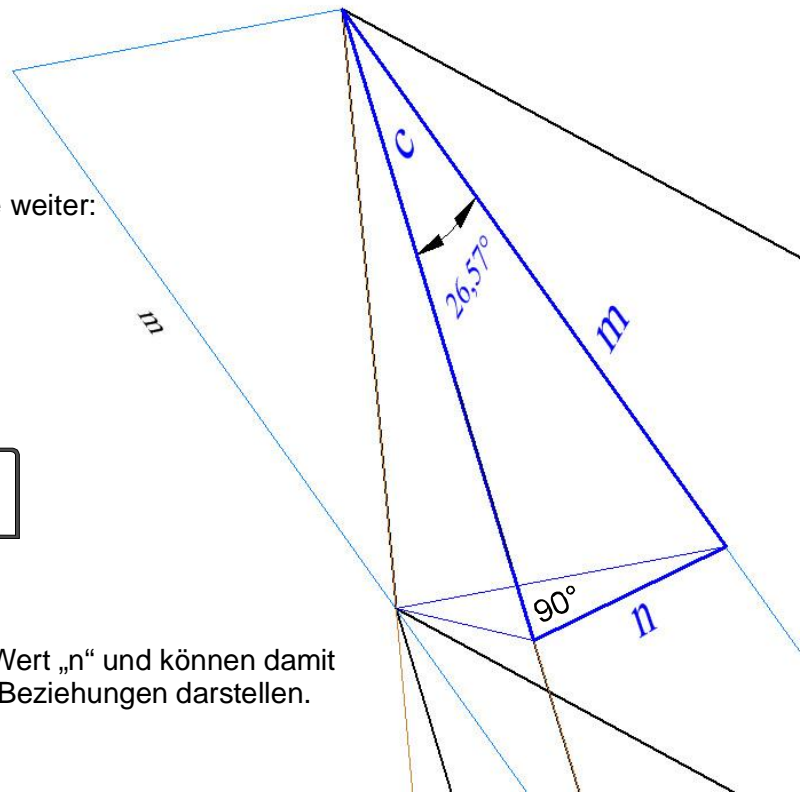
Im vorherigen Schritt haben wir ein Dreieck eingezeichnet, an dem die einzige Unbekannte, mit „n“ bezeichnet wird!

Nun geht es auf der Segmentoberfläche weiter:

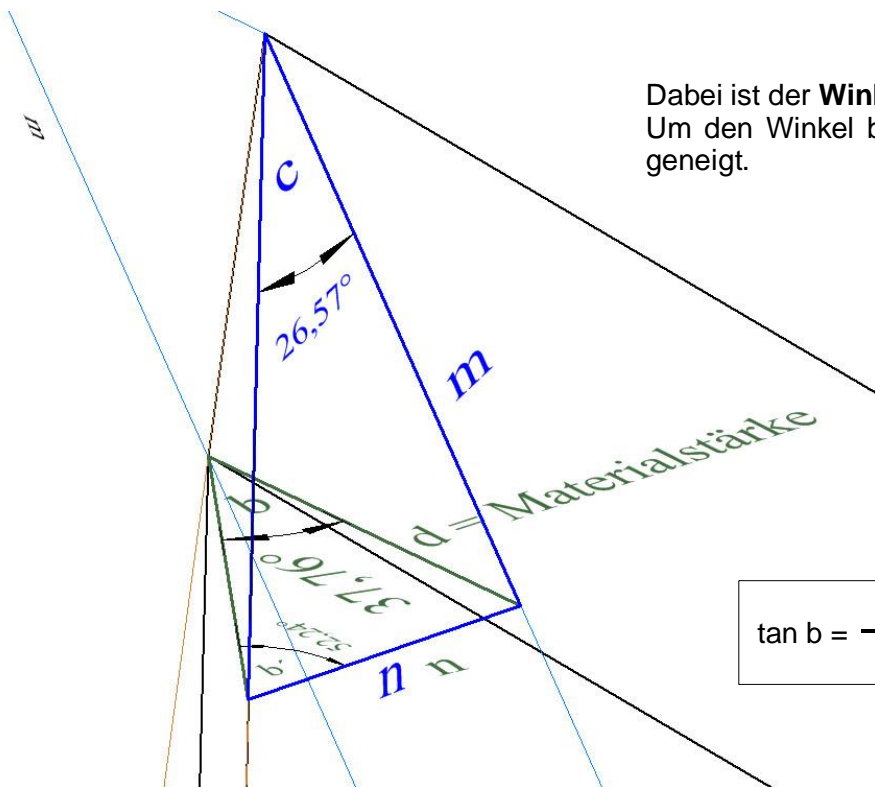
Der Winkel „c“ ist der Gehrungswinkel, welcher ja bereits berechnet wurde.

Damit ergibt sich:

$$\sin c = \frac{n}{m} \quad \textcircled{5}$$



Nun haben wir eine Beziehung für den Wert „n“ und können damit in dem zuvor konstruierten Dreieck alle Beziehungen darstellen.



Dabei ist der **Winkel b** der gesuchte **Sägeblattwinkel**. Um den Winkel b wird das Sägeblatt beim Zuschnitt geneigt.

$$\tan b = \frac{n}{d} \quad \textcircled{6}$$



Den Winkel b bezeichnen wir als Sägeblattwinkel.

An der Kreissäge ist der Winkel b meist an einer Skala einzustellen.

Dabei ist hier die Abweichung zu dem ohnehin vorhandenen 90°-Winkel zur Tischfläche gemeint.

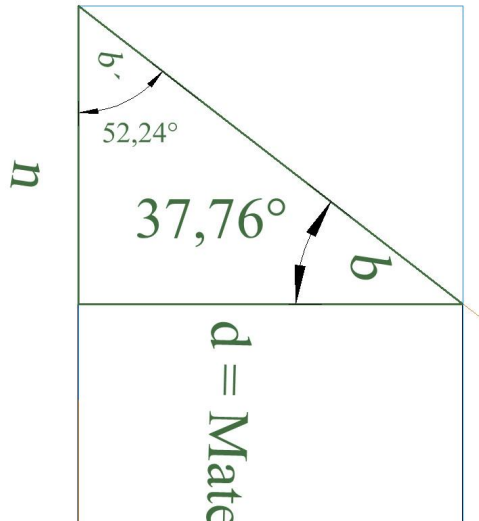
Am Zuschnitt selbst, und damit nachmessbar, ist allerdings der Komplementärwinkel b' vorhanden.



In meinen anderen Ausarbeitungen betrachte ich alle Winkel, welche am Zuschnitt zu messen sind als Standardwinkel. Zusätzlich habe ich dabei auch Bezeichner aus dem griechischen Alphabet verwendet.

weiter gehts

Das finale Dreieck in der Draufsicht.



Als Winkel:

$$b = \tan^{-1}(\tan b) = \arctan(\tan b) [^\circ]$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich

$$\tan b = \frac{n}{d} \quad \textcircled{6}$$



Da b der Neigungswinkel des Sägeblattes ist, wird diese Formel nun aufgelöst:

Aus ⑤ folgt: $n = m \cdot \sin c$

Aus ④ folgt: $d = \frac{m}{\tan a}$

damit wird ⑥ $\tan b = \frac{n}{d} = \frac{m \cdot \sin c}{m / \tan a}$

Dies ergibt für den **Sägeblattwinkel**:



$$\tan b = \sin c \cdot \tan a$$

a = Steigungswinkel der Pyramide

c = Gehrungswinkel

In unserem konkreten Beispiel ergibt dies einen errechneten Wert für den Sägeblattwinkel:

$$\tan b = \sin(90^\circ - 63,43^\circ) \cdot \tan 60^\circ = \sin 0,4473 \cdot \tan 1,732 = 0,7747 ; b = \arctan(0,7747) = 37,766^\circ$$

Der Komplementärwinkel b' ist damit $90^\circ - 37,766 = \underline{52,234^\circ}$

Schnellbemaßung in TurboCad

1. Konstruktion per Senkrechten

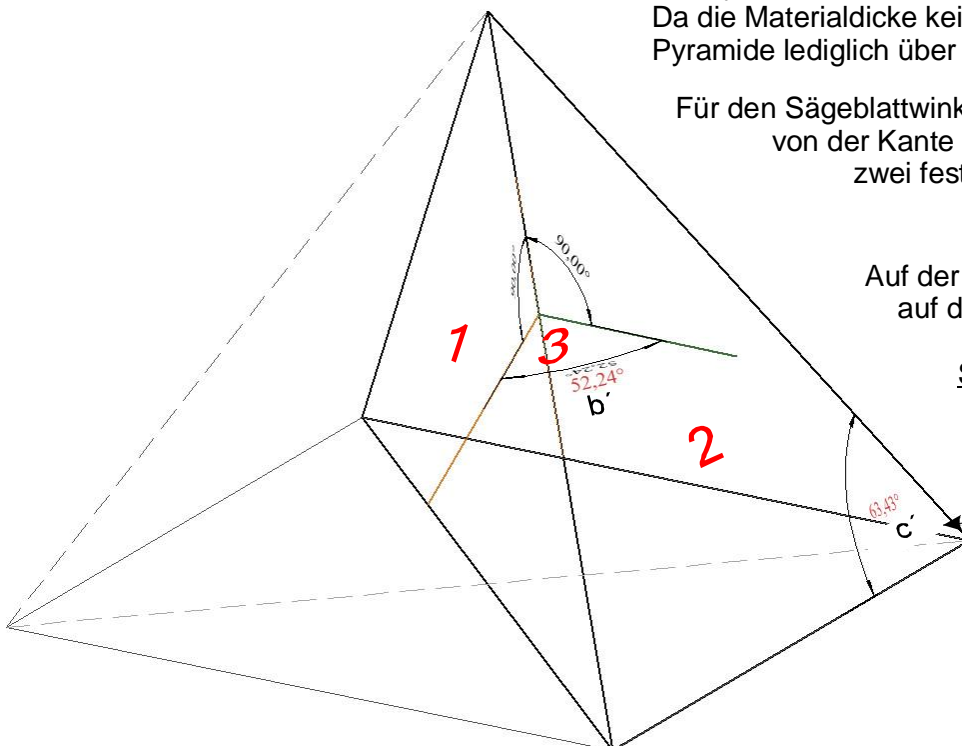
Nutzt man TurboCad lediglich um die Schnittwinkel zu ermitteln, so ist dies wesentlich einfacher möglich.

Die Pyramide wird wie anfangs gezeigt konstruiert. Da die Materialdicke keine Rolle spielt, wird die Pyramide lediglich über die Diagonale halbiert.

Für den Sägeblattwinkel werden, wie gezeigt nun von der Kante aus Senkrechten auf die zwei festzulegenden Arbeitsebenen (1) und (2) gezeichnet.

Auf der nun neuen Arbeitsebene (3), auf der sich beide Senkrechten befinden, lässt sich dann der Sägeblattwinkel b' bemaßen.

Der Gehrungswinkel c' kann direkt auf der AE2 bemaßt werden.



weiter gehts

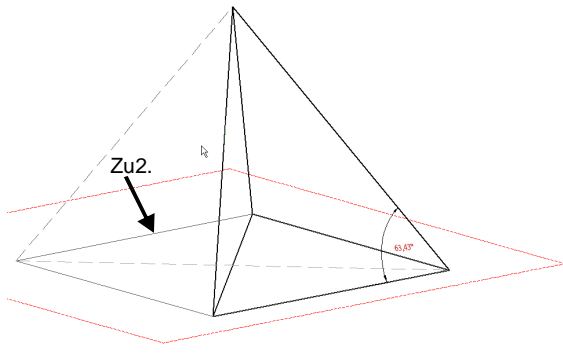
2. Bestimmung durch Arbeitsebenenschnitt

Um an die, für die Winkelbestimmung notwendigen, Senkrechten zu kommen benötigten wir viele Konstruktionsschritte. Der Sägeblattwinkel wurde dann auf einer neuen Arbeitsebene eingezeichnet.

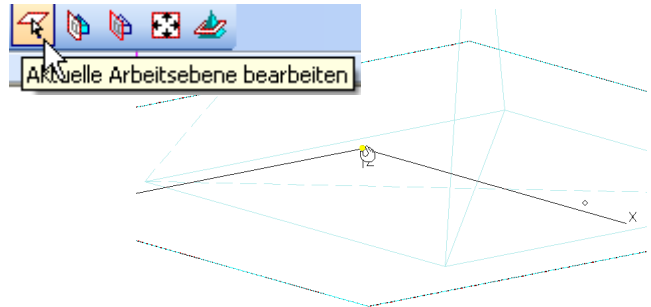
Diese AE kann man jedoch auch direkt in die entsprechende Schräglage bringen und das Segment durch diese AE schneiden. Damit liegen die neuen Kanten des Segmentes zur Winkelbemaßung fest.

Vorgehensweise:

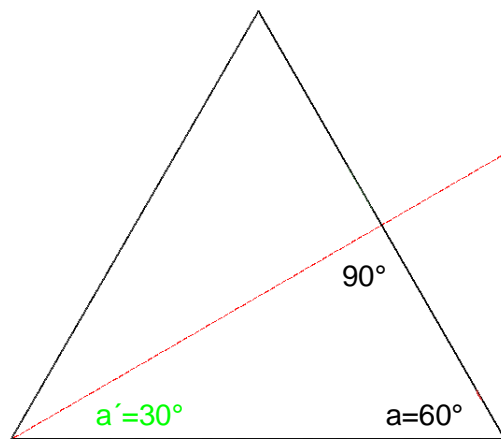
1. AE auf den Boden legen



2. Auch die AE hat einen Bezugspunkt. Den verlagern wir in die Mitte der hinteren, gestrichelten Kante (siehe Bild links "Zu2.>").



3. Ändern der Arbeitsebene entsprechend der Pyramidensteigung von 60° auf 30°

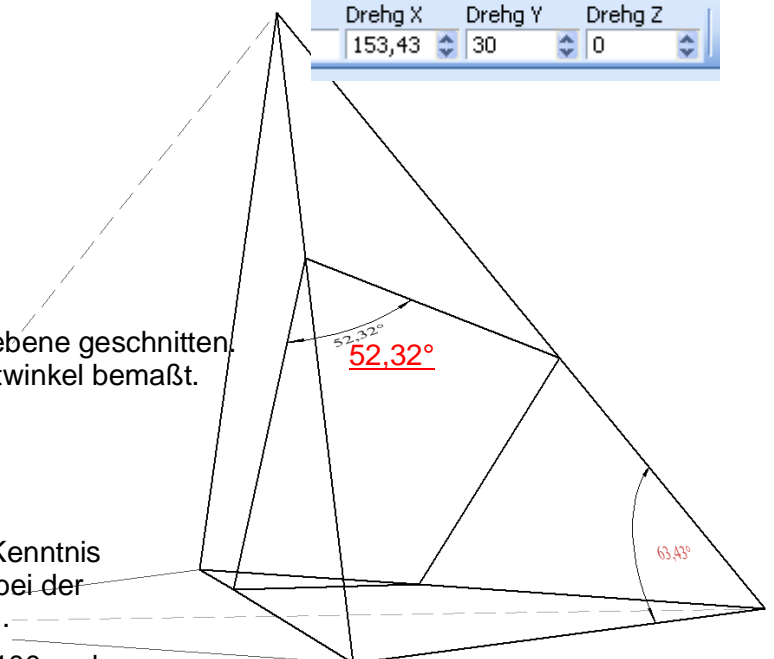


4. Neigen der AE entsprechend dem Gehrungswinkel von 63,43° (! Dieser muss zuvor bemaßt werden).
NR: $180 - (90 - 63,43) = 180 - 26,57 = 153,43$

Die AE hat nach 3. und 4. bei mir folgende Werte.

vorher	180	0	0
Drehg X	153,43	30	0

5. Das Segment wird nun durch neue Arbeitsebene geschnitten. An den Schnittkante wird nun der Sägeblattwinkel bemaßt.



Resümee:

Bei dieser Vorgehensweise muss man unter Kenntnis von Steigungs- und Gehrungswinkel rechnen, bei der zuvor gezeigten Lösung lediglich konstruieren.

Die Differenz beider Lösungen beträgt hier 6/100 und ist damit für Holzwerkstoffe nicht erwähnenswert.

Zum guten Schluß eine frohe Botschaft

Zu diesem Thema gibt es für alle Excelfreunde einen Rechner mit einem Arbeitsblatt zur Druckausgabe sowie weitere Doku's. Diese sind im www zu finden:

- Pyramidenschnitt_Rechner.xls
- Der_Pyramidenschnitt.pdf
- Pyramidenschnitt_Beispiel.pdf

Viel Spass
beim Heimwerken
und Gehirnjogging

mfg. Leopoldi



- Alle Angaben ohne Gewähr -